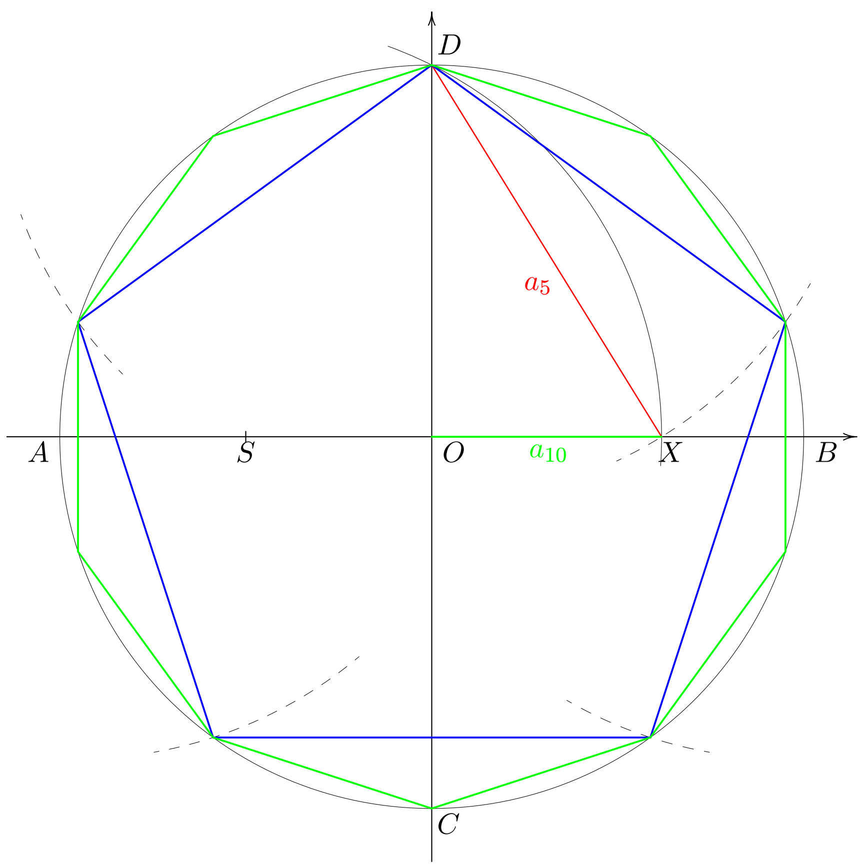
Pravidelný pětiúhelník a desetiúhelník

Konstrukce pravidelného pětiúhelníku vepsaného do dané kružnice

Postup:

1) Sestrojíme osový kříž a kružnici se středem v počátku O a zvoleným poloměrem r. Průsečíky svislé a vodorovné osy s kružnicí označíme po řadě $A,\ B,\ C,\ D$.
2) Nalezneme střed S úsečky AO.
3) Sestrojíme kružnicový oblouk se středem v bodě S a poloměrem $r' = |SD|$, průsečík oblouku s úsečkou OB označíme X.
4) Délka strany pravidelného pětiúhelníku je pak $a_5 = |DX|$.
5) Zároveň jsme získali stranu pravidelného desetiúhelníku $a_{10} = |OX|$.



Důkaz správnosti konstrukce

Spočteme délku tětivy DX a délku strany pravidelného pětiúhelníku vepsaného do kružnice o daném poloměru r.

a) *Délka tětivy*

V pravoúhlém trojúhelníku SOD je $|SO| = \dfrac{r}{2}$, $|OD| = r$, a tedy $|DS| = \sqrt{r^2 + \left(\dfrac{r}{2}\right)^2} = \dfrac{r\sqrt{5}}{2}$,

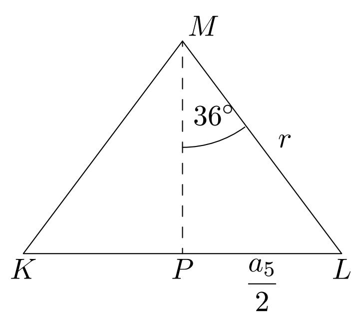
$|OX| = |SX| - |SO| = \dfrac{r\sqrt{5}}{2} - \dfrac{r}{2} = \dfrac{r}{2}(\sqrt{5} - 1)$.

V dalším pravoúhlém trojúhelníku OXD vychází pro přeponu:

$|DX| = \sqrt{r^2 + \left(\dfrac{r}{2}(\sqrt{5} - 1)\right)^2} = r\sqrt{\dfrac{5 - \sqrt{5}}{2}} = a_5$.

b) *Délka strany pětiúhelníku*

Jde vlastně o základnu rovnoramenného trojúhelníku s rameny délky r a úhlem $72°$ při hlavním vrcholu.



K výpočtu a_5 můžeme použít kteroukoli goniometrickou funkci, např. sinus. Z trojúhelníku PLM pak vychází: $a_5 = 2r \sin 36°$. Zbývá ukázat, že $2 \sin 36° = \sqrt{\dfrac{5 - \sqrt{5}}{2}}$.

Jedna z možností je tato: vyjdeme ze skutečnosti, že $5 \cdot 36 = 180$, tj. pro $\varphi = 36°$ je $\sin 5\varphi = 0$. S poslední rovnicí budeme zacházet jako s rovnicí pro neznámou $\sin \varphi$. Levou stranu rovnice postupně upravíme s použitím vzorců:

$\sin(\alpha + \beta) = \sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta$,

$\sin 2\alpha = 2 \sin \alpha \cos \alpha$,

$\cos 2\alpha = \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha$,

$\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$.

$\sin 5\varphi = \sin(\varphi + 4\varphi) = \sin \varphi \cos 4\varphi + \cos \varphi \sin 4\varphi$ a dále pomocí vztahů pro sinus a kosinus dvojnásobného úhlu postupně dostaneme výslednou rovnici:

$\sin \varphi(16 \sin^4 \varphi - 20 \sin^2 \varphi + 5) = 0$.

Jedno z řešení, které odpovídá hodnotě $\varphi = 36°$, je $\sin \varphi = \sqrt{\dfrac{5 - \sqrt{5}}{8}}$, čímž jsme úplně hotovi.